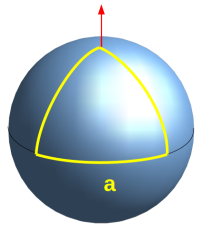
# SAMPLE SOLUTIONS EXERCISE 8

## EXERCISE 8.1: WINKELSUMME VON DREIECKEN AUF EINER KUGEL (3P)

Auf eine Kugel mit dem Radius $R$ fährt ein Schiff vom Nordpol südwärts zum Äquator, dann eine Strecke $a$ am Äquator entlang und schließlich wieder nordwärts zurück zum Nordpol.

(a) Berechnen Sie die Winkelsumme des Dreiecks. (2P)

(b) Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks. (1P)




### SAMPLE SOLUTION

(a) Wenn man vom oben auf den Norpol schaut, entspricht die Winkeländerung dort gerade dem Kreisbogen auf dem Äquator, also $\delta\phi = \frac{2\pi a}{R}$. Schaut man von der Seite auf den Äquator, so sieht man, dass die dortigen Winkel rechte Winkel sind. Die Winkelsumme ist also

$$\pi + 2\pi \frac{a}{R}$$

im Bogenmaß bzw. $180° + 360° \frac{a}{R}$ gemessen in Grad. Die Winkelsumme eines Dreiecks auf eine positiv gekrümmten Fläche ist also größer als 180°. Damit hätte ein Lebewesen, für das die dritte Dimension senkrecht zur Kugeloberfläche nicht zugänglich wäre, trotzdem die Möglichkeit, eine Krümmung zu erkennen und zu quantifizieren.

(b) Die Gesamtoberfläche der Kugel ist $A = 4\pi R^2$. Die ober Halbschale hat dementsprechend eine Fläche von $2\pi R^2$. Die Fläche ist des Dreiecks ist also $A = 2\pi R^2 \frac{a}{R} = 2\pi a R$.

**Bemerkung:** Eine Kugel ist eine Fläche konstanter Gaußscher Krümmung $K = 1/R^2$. An diesem Beispiel können Sie sehen, dass die Fläche multipliziert mit der Krümmung gerade den Winkelzuwachs in der Winkelsumme ergibt.

---

## EXERCISE 8.2: TAYLORENTWICKLUNG (5P)

Im folgenden betrachten wir die Funktion

$$f(x) = x + \cos x\,.$$

(a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion. (1P)

(b) Finden sie eine Gerade, die sich in dem Punkt (0,1) an die Kurve anschmiegt. Solch eine Gerade nennt man einen linearen Fit oder eine Taylor-Näherung erster Ordnung. (1P)

(c) Wiederholen Sie diese Aufgabe, indem Sie an den Punkt (0,1) eine Schmiegeparabel legen. Man spricht hier von einem quadratischen Fit oder einer Näherung zweiter Ordnung. (1P)

(d) Dieses Vorgehen lässt sich beliebig fortsetzen, indem man immer weitere Potenzen der Schmiegekurve hinzufügt. Im Limes unendlich hoher Potenzen erhält man eine sogenannte *Taylor-Reihe*

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_2 x^2 + \frac{1}{6} a_3 x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \,,$$

wobei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ die Koeffizienten der Reihe sind. Berechnen Sie zunächst die erste Ableitung $F'(x)$. (2P)

(e) Bestimmen Sie die Koeffizienten so, dass $F(x) = F'(x)$ und $F(0) = 1$ ist. Kennen Sie diese Funktion? (1P)

## Sample Solution

(a) Die erste und zweite Ableitung von $f(x) = x + \cos x$ lauten:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 1 - \sin x \,,$$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -\cos x \,.$$

(b) Die Gerade hat die Gleichung $g(x) = mx + n$. Sie muss an der Stelle $x = 0$ mit dem Funktionswert von $f$ übereinstimmen. Damit sie sich dort anschmiegt, müssen ferner die Steigungen übereinstimmen. Das ergibt zwei Bestimmungsgleichungen:

$$g(0) = f(0) \quad \Rightarrow \quad n = 0 + 1 = 1 \,,$$

$$g'(0) = f'(0) \quad \Rightarrow \quad m = 1 - 0 = 1 \,.$$

Damit ergibt sich die Geradengleichung $g(x) = 1 + x$.

(c) Die Parabel hat die Gleichtung $p(x) = ax^2 + bx + c$. Sie muss bei $x = 0$ in ihrem Funktionswert sowie in ihren ersten beiden Ableitungen mit der Funktion $f(x)$ übereinstimmen. Dabei ist $p'(x) = 2ax + b$ und $p''(x) = 2a$. Das ergibt drei Bestimmungsgleichungen:

$$p(0) = f(0) \quad \Rightarrow \quad c = 0 + 1 = 1 \,,$$

$$p'(0) = f'(0) \quad \Rightarrow \quad b = 1 - 0 = 1 \,,$$

$$p''(0) = f''(0) \quad \Rightarrow \quad 2a = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2} \,.$$

Damit ergibt sich die Parabel $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Sie stimmt mit der Geradengleichung aus Teil (b), ergänzt um einen quadratischen Term, überein.

(d) Wir bilden zunächst die erste Ableitung: (1P)

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

$$\begin{aligned}
F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \Big) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big( a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \Big) \qquad \text{weil } x^0 = 1 \text{ und } 0! = 1 \text{ ist} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n \qquad \text{weil die Ableitung einer Konstante Null ist} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} \qquad \text{weil } (n-1)!n = n! \text{ ist}
\end{aligned}$$

Jetzt ist es noch sinnvoll, einen Index-Shift durchzuführen, d.h. wir lassen die Summe nicht von 1 sondern von 0 laufen und ersetzen dafür $n-1 \to n$ und $n \to n+1$: (1P)

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n$$

(e) Zunächst schauen wir uns die Bedingung $F(0) = 0$ an:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \quad \Rightarrow \quad F(0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1\,.$$

Danach betrachten wir die Gleichung $F'(x) = F(x)$ (die für alles $x$ gelten soll):

$$F'(x) = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} = a_n$$

Also müssen alle Koeffizienten gleich 1 sein. Die Funktion, die gleich ihrer eigenen Ableitung ist, ist bekanntlich die Exponentialfunktion. Damit haben wir die Darstellung der Exponentialfunktion als Taylorreihe hergeleitet:

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.}$$

---

## Exercise 8.3: Komplexe Zahlen (4P)

Das Wurzelziehen aus negativen Zahlen ist verboten? Von wegen. Wir dürfen das. Dazu definieren wir einfach die imaginäre Einheit $i := \sqrt{-1}$, sodass $i^2 = -1$ ist.

(a) Berechnen Sie folgende Ausdrücke: (2P)

$$\sqrt{-4}\,, \qquad (2+i)^2\,, \qquad 1+i+i^2+i^3\,, \qquad (1+i)(1-i)\,.$$

(b) Berechnen Sie nach der Mitternachtsformel die 'Nullstellen' $x_{1,2}$ der Parabel (2P)

$$p(x) = x^2 + 2x + 2$$

und überzeugen Sie sich, dass $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ ist.

## Sample Solution

(a) Wir wenden hier einfach die normalen Rechenregeln für das Ausmultiplizieren oder die binomischen Formeln oder das Wurzelziehen an:

$$\begin{aligned} \sqrt{-4} &= \sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2i \\ (2+i)^2 &= 2^2 + 2\cdot 2i + i^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i \\ 1 + i +^2 + i^3 &= 1 + i - 1 - i = 0 \\ (1+i)(1-i) &= 1 + i + i + 1 = 2 \end{aligned}$$

(b) Die Nullstellen der Parabel $x^2 + 2x + 2$ sind

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i\,.$$

Wir bilden

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= (x + 1 - i)(x + 1 + i) \\ &= x^2 + x + ix + x + 1 + i - ix - i + 1 = x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$