SAMPLE SOLUTIONS EXERCISE 7

EXERCISE 7.1: LORENTZ-TRANSFORMATION (8P)

Die Lorentz-Transformation verknüpft zwei Intertialsysteme S und S' durch eine Koordinatentransformation $(x,t) \to (x',t')$, die Raum und Zeit so miteinander kombiniert, dass die Lichtgeschwindigkeit c invariant bleibt. Sie hat die allgemeine Form

$$x' = Ax + Bt$$
$$t' = Cx + Dt$$

mit Koeffizienten A, B, C, D, die wir im folgenden bestimmen wollen.

(a) Bevor wir starten, berechnen wir zur Übung die Umkehrtransformation $(x',t') \to (x,t)$ für allgemeine Koeffizienten A, B, C, D. Das geht besonders einfach in einer Matrixschreibweise. (1P)

(b) Invarianz der Lichtgeschwindigkeit: Wenn sich ein Lichtsignal im System S mit Lichtgeschwindigkeit gemäß $x = ct$ bewegt, so wird es sich (wie im Michelson-Morley-Experiment) auch im System S' mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, d.h. $x' = ct'$. Leiten Sie daraus eine Beziehung zwischen den Koeffizienten her. (1P)

(c) Stellen Sie sich ein Objekt vor, das im System S' am Ursprung ruht. Nehmen Sie an, dass sich das System S' relativ zum System S mit der Geschwindigkeit u bewegt. Leiten Sie daraus eine weitere Gleichung zwischen den Koeffizienten ab. (1P)

(d) Wiederholen Sie die Überlegungen aus (c), jedoch für ein am Ursprung in S ruhendes Objekt. (1P)

(e) Kombinieren Sie die Gleichungen aus (b),(c) und (d), um die Unbekannten B, C, D allein in A auszudrücken und dadurch zu eliminieren, und setzen Sie das Ergebnis in die Lorentz-Transformation ein. (1P)

(f) Berechnen Sie mit diesem Ergebnis und (a) die Umkehrtransformation. (1P)

(g) Reflexivität: Wenn sich das System S' von S aus gesehen mit der Geschwindigkeit u nach rechts bewegt, dann muss sich ebenso S von S' aus gesehen mit der Geschwindigkeit $-u$ nach links bewegen. Damit die Lorentz-Transformation reflexiv, also in beiden Situationen anwendbar ist, muss sich die Umkehrtransformation von der Transformation nur um ein Vorzeichen in u, also durch $u \to -u$ unterscheiden. Benutzen Sie diese Forderung, um die Unbekannte A zu bestimmen. Damit ist dann die Lorentz-Transformation vollständig bestimmt. (2P)

SAMPLE SOLUTION

(a) Wir schreiben die Transformation zunächst in Matrixschreibweise hin:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

Um diese lineare Transformation zu invertieren, muss man einfach nur das Inverse der Matrix bilden. Das kennen Sie aus der Mathematik:

$$M^{-1} = \frac{1}{AD - BC} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$$

Dabei ist der Vorfaktor der Kehrwert der Determinante. Die Umkehrtransformation lautet also:

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{AD - BC} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}.$$

Das kann man dann, wenn man möchte, in einzelnen Komponenten hinschreiben.

(b) Wir setzen zunächst die Transformation in $x' = ct'$ ein:

$$x' = ct' \quad \Rightarrow \quad Ax + Bt = c(Cx + Dt) = cCx + cDt.$$

Anschließend setzen wir $x = ct$ in diese Gleichung ein:

$$Act + Bt = cCct + cDt \quad \Rightarrow \quad (cA + B)t = (c^2C + cD)t$$

Weil diese Gleichung für alle $t > 0$ gelten muss, können wir durch t teilen:

$$\Rightarrow \quad \boxed{cA + B = c^2C + cD.}$$

(c) Im System S' hat das am Ursprung ruhende Objekt die Koordinate $x' = 0$ für alle t'. Da sich das System S' relativ zum System S mit der Geschwindigkeit u nach rechts bewegt, wird sich von S aus gesehen dasselbe Objekt mit der Geschwindigkeit u bewegen, d.h. $x = ut$. Wir setzen diese beiden Beziehungen in die erste Gleichung ein:

$$x' = Ax + Bt \quad \Rightarrow \quad 0 = Aut + Bt = (Au + B)t.$$

Wiederum können wir durch t dividieren und erhalten

$$\boxed{Au + B = 0.}$$

(d) Hier hat das Objekt in S die Koordinate $x = 0$ für alle t, während es sich von S' aus gesehen mit der Geschwindigkeit u nach links bewegt, d.h. $x' = -ut'$. Wenn wir diese beiden Beziehungen in die beiden gegebenen Gleichungen einsetzen, erhalten wir

$$-ut' = Bt \quad \text{und} \quad t' = Dt.$$

Löst man diese beiden Gleichungen nach t', setzt beide gleich, dividiert durch t und ordnet die Terme, so erhalten wir die Gleichung

$$\boxed{Du + B = 0.}$$

(e) Aus $Au + B = 0$ und $Du + B = 0$ folgt $A = D$. Setzt man $A = D$ in die Gleichung $cA+B = c^2C+cD$ ein, reduziert sich diese auf $B = c^2C$. Eingesetzt in die Transformation können wir A nun ausklammern und erhalten

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & -u \\ -u/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

(f) Dazu muss man das einfach nur in das Ergebnis von (a) einsetzen. Man erhält

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{A(1-\frac{u^2}{c^2})} \begin{pmatrix} 1 & u \\ u/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

(g) Die Forderung der Reflexivität besagt, dass wir durch $u \to -u$ die Transformation umkehren können, d.h.

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & -u \\ -u/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{u \to -u} \quad \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & u \\ u/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

Wenn wir das mit (f) vergleichen, werden wir auf die Beziehungen

$$A = \frac{1}{A(1-\frac{u^2}{c^2})}$$

geführt. Damit können wir den Koeffizienten A bestimmen:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Nun wissen Sie, woher diese Wurzel kommt.
In der speziellen Relativitätstheorie benutzt man gerne die Abkürzungen

$$\beta = \frac{u}{c} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Damit lässt sich die komplette Lorentz-Transformation kompakt schreiben als:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma u \\ -\gamma u/c^2 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.}$$

Exercise 7.2: Lorentz-Transformationen und Hyperbelfunktionen (4P)

In der Relativitätstheorie spielen die Hyperbelfunktionen $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ und $\tanh(x)$ (häufig ausgesprochen als *kosch*, *sinsch* und *tansch*) eine wichtige Rolle. In dieser Übung wollen wir uns mit diesen Funktionen vertraut machen. Sie sind definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

und ähneln in vielfacher Weise den Winkelfunktionen.

(a) Zeigen Sie, dass $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ ist. (1P)

(b) Beweisen Sie die Additionstheoreme (1P)

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

(c) Eine Lorentz-Transformation (siehe Vorlesung) in Matrixform

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

mit $\beta = u/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ lässt auch sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}}_{=:\Lambda(\theta)} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die *Rapidität* θ als Funktion von $\beta = u/c$. (1P)

(d) Überzeugen Sie sich, dass hintereinander ausgeführte Lorentz-Transformationen[1] additiv in der Rapidität sind, d.h. es gilt: (1P)

$$\Lambda(\theta_1)\Lambda(\theta_2) = \Lambda(\theta_1 + \theta_2)$$

Wenn Sie möchten, denken Sie über die Interpretation dieses Sachverhalts nach.

Sample Solution

(a) Wir setzen dazu einfach die Definitionen ein:

$$\cosh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$\sinh^2(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

Daran sieht man sofort, dass $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{4}{4} = 1$ ist.

(b) Betrachten wir zunächst vom ersten Additionstheorem die rechte Seite und setzen dort die Definitionen ein:

$$\begin{aligned}
\sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y) &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} \pm \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} \pm e^{x+y} \mp e^{x-y} \pm e^{-x+y} \mp e^{-x-y}}{4} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \sinh(x+y) & \text{für } + \\ \frac{1}{2}(e^{x-y} - e^{-x+y}) = \sinh(x-y) & \text{für } - \end{cases} \\
&= \sinh(x \pm y).
\end{aligned}$$

Der Beweis des zweiten Additionstheorems verläuft analog dazu.

(c) Man kann das auf sehr verschiedene Weisen berechnen. Die schnellste und einfachste Art funktioniert so: man setzt die Matrixelemente gleich, d.h.

$$\gamma = \cosh\theta \quad \text{und} \quad \gamma\beta = \sinh\theta$$

[1]Genauer gesagt: Hintereinanderausführung von Lorentz-Transformationen in die gleiche Richtung. Da wir hier aber nur die x-Richtung haben, also die räumlichen Koordinaten eindimensional sind, ist das automatisch so.

und bildet dann die Quotienten

$$\beta = \frac{\gamma\beta}{\gamma} = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}.$$

Damit gelangen wir zu

$$\boxed{\beta = \tanh\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \operatorname{arctanh}(\beta).}$$

Streng genommen müsste man jetzt noch prüfen, dass beiden Ausgangsgleichungen $\gamma = \cosh\theta$ und $\gamma\beta = \sinh\theta$ auch separat erfüllt sind, da wir ja nur deren Quotienten angeschaut haben, aber das ist zum Glück der Fall.

(d) Die Rechnung beginnt mit einer Matrixmultiplikation mit anschließender Anwendung der Additionstheoreme aus Teil (b):

$$\begin{aligned}
\Lambda(\theta_1)\Lambda(\theta_2) &= \begin{pmatrix} \cosh\theta_1 & \sinh\theta_1 \\ \sinh\theta_1 & \cosh\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\theta_2 & \sinh\theta_2 \\ \sinh\theta_2 & \cosh\theta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh\theta_1\cosh\theta_2 + \sinh\theta_1\sinh\theta_2 & \cosh\theta_1\sinh\theta_2 + \sinh\theta_1\cosh\theta_2 \\ \cosh\theta_1\sinh\theta_2 + \sinh\theta_1\cosh\theta_2 & \cosh\theta_1\cosh\theta_2 + \sinh\theta_1\sinh\theta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh(\theta_1+\theta_2) & \sinh(\theta_1+\theta_2) \\ \sinh(\theta_1+\theta_2) & \cosh(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} = \Lambda(\theta_1+\theta_2).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Matrix der Lorentztransformation sieht der einer normalen Drehmatrix

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

sehr ähnlich, nur dass dort Winkelfunktionen und ein zusätzliches Vorzeichen auftreten. Drehmatrizen sind ebenfalls bei Hintereinanderausführung additiv im Winkel, d.h. $R(\phi_1)R(\phi_2) = R(\phi_1+\phi_2)$. Insofern lassen sich Lorentz-Transformation interpretieren als eine Art "Drehung" zwischen Raum und Zeit, allerdings keine wirkliche Drehung, sondern eine "hyperbolische Drehung", die im Unterschied zu einer echten Drehung nicht in 2π periodisch ist. Übrigens kann man mit (c) und (d) das Additionstheorem der Geschwindigkeiten sofort ganz leicht ausrechnen:

$$\beta = \tanh\theta = \tanh(\theta_1+\theta_2) = \tanh\big(\operatorname{arctanh}(\beta_1) + \operatorname{arctanh}(\beta_2)\big).$$

Mit etwas Geduld kann man zeigen, dass diese Formel zu der in der Vorlesung gezeigten Formel für das Additionstheorem äquivalent ist.