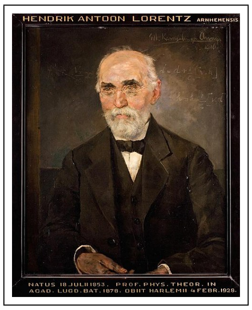
# Phänomene der Physik

Orientierungsstudium – Ergänzende Übungen – SS 2021




Hendrik Antoon Lorentz
1853-1928 [Wikimedia]

## Exercise 7.1: Lorentz-Transformation (8P)

Die Lorentz-Transformation verknüpft zwei Intertialsysteme $S$ und $S'$ durch eine Koordinatentransformation $(x,t) \to (x',t')$, die Raum und Zeit so miteinander kombiniert, dass die Lichtgeschwindigkeit $c$ invariant bleibt. Sie hat die allgemeine Form

$$x' = Ax + Bt$$
$$t' = Cx + Dt$$

mit Koeffizienten $A, B, C, D$, die wir im folgenden bestimmen wollen.

(a) Bevor wir starten, berechnen wir zur Übung die Umkehrtransformation $(x',t') \to (x,t)$ für allgemeine Koeffizienten $A, B, C, D$. Das geht besonders einfach in einer Matrixschreibweise. (1P)

(b) Invarianz der Lichtgeschwindigkeit: Wenn sich ein Lichtsignal im System $S$ mit Lichtgeschwindigkeit gemäß $x = ct$ bewegt, so wird es sich (wie im Michelson-Morley-Experiment) auch im System $S'$ mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, d.h. $x' = ct'$. Leiten Sie daraus eine Beziehung zwischen den Koeffizienten her. (1P)

(c) Stellen Sie sich ein Objekt vor, das im System $S'$ am Ursprung ruht. Nehmen Sie an, dass sich das System $S'$ relativ zum System $S$ mit der Geschwindigkeit $u$ bewegt. Leiten Sie daraus eine weitere Gleichung zwischen den Koeffizienten ab. (1P)

(d) Wiederholen Sie die Überlegungen aus (c), jedoch für ein am Ursprung in $S$ ruhendes Objekt. (1P)

(e) Kombinieren Sie die Gleichungen aus (b),(c) und (d), um die Unbekannten $B, C, D$ allein in $A$ auszudrücken und dadurch zu eliminieren, und setzen Sie das Ergebnis in die Lorentz-Transformation ein. (1P)

(f) Berechnen Sie mit diesem Ergebnis und (a) die Umkehrtransformation. (1P)

(g) Reflexivität: Wenn sich das System $S'$ von $S$ aus gesehen mit der Geschwindigkeit $u$ nach rechts bewegt, dann muss sich ebenso $S$ von $S'$ aus gesehen mit der Geschwindigkeit $-u$ nach links bewegen. Damit die Lorentz-Transformation reflexiv, also in beiden Situationen anwendbar ist, muss sich die Umkehrtransformation von der Transformation nur um ein Vorzeichen in $u$, also durch $u \to -u$ unterscheiden. Benutzen Sie diese Forderung, um die Unbekannte $A$ zu bestimmen. Damit ist dann die Lorentz-Transformation vollständig bestimmt. (2P)

*Please turn over* ⇒

## Exercise 7.2: Lorentz-Transformationen und Hyperbelfunktionen (4P)

In der Relativitätstheorie spielen die Hyperbelfunktionen $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ und $\tanh(x)$ (häufig ausgesprochen als *kosch*, *sinsch* und *tansch*) eine wichtige Rolle. In dieser Übung wollen wir uns mit diesen Funktionen vertraut machen. Sie sind definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

und ähneln in vielfacher Weise den Winkelfunktionen.

(a) Zeigen Sie, dass $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ ist. (1P)

(b) Beweisen Sie die Additionstheoreme (1P)

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

(c) Eine Lorentz-Transformation (siehe Vorlesung) in Matrixform

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

mit $\beta = u/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ lässt auch sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}}_{=:\Lambda(\theta)} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die *Rapidität* $\theta$ als Funktion von $\beta = u/c$. (1P)

(d) Überzeugen Sie sich, dass hintereinander ausgeführte Lorentz-Transformationen[1] additiv in der Rapidität sind, d.h. es gilt: (1P)

$$\Lambda(\theta_1)\Lambda(\theta_2) = \Lambda(\theta_1 + \theta_2)$$

Wenn Sie möchten, denken Sie über die Interpretation dieses Sachverhalts nach.

Freiwillige Übungen zur Selbstkontrolle im Orientierungsstudium Physik (`ms.hayehinrichsen.de`).

[1] Genauer gesagt: Hintereinanderausführung von Lorentz-Transformationen in die gleiche Richtung. Da wir hier aber nur die $x$-Richtung haben, also die räumlichen Koordinaten eindimensional sind, ist das automatisch so.