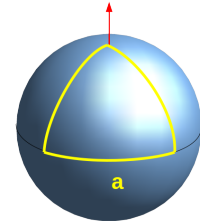


SAMPLE SOLUTIONS EXERCISE 9

EXERCISE 9.1: WINKELSUMME VON DREIECKEN AUF EINER KUGEL (3P)

Auf eine Kugel mit dem Radius R fährt ein Schiff vom Nordpol südwärts zum Äquator, dann eine Strecke a am Äquator entlang und schließlich wieder nordwärts zurück zum Nordpol.



- (a) Berechnen Sie die Winkelsumme des Dreiecks. (2P)
- (b) Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks. (1P)

SAMPLE SOLUTION

- (a) Wenn man vom oben auf den Norpol schaut, entspricht die Winkeländerung dort gerade dem Kreisbogen auf dem Äquator, also $\delta\phi = \frac{2\pi a}{R}$. Schaut man von der Seite auf den Äquator, so sieht man, dass die dortigen Winkel rechte Winkel sind. Die Winkelsumme ist also

$$\pi + 2\pi \frac{a}{R}$$

im Bogenmaß bzw. $180^\circ + 360^\circ \frac{a}{R}$ gemessen in Grad. Die Winkelsumme eines Dreiecks auf eine positiv gekrümmten Fläche ist also größer als 180° . Damit hätte ein Lebewesen, für das die dritte Dimension senkrecht zur Kugeloberfläche nicht zugänglich wäre, trotzdem die Möglichkeit, eine Krümmung zu erkennen und zu quantifizieren.

- (b) Die Gesamtoberfläche der Kugel ist $A = 4\pi R^2$. Die ober Halbschale hat dementsprechend eine Fläche von $2\pi R^2$. Die Fläche ist des Dreiecks ist also $A = 2\pi R^2 \frac{a}{R} = 2\pi aR$.

Bemerkung: Eine Kugel ist eine Fläche konstanter Gaußscher Krümmung $K = 1/R^2$. An diesem Beispiel können Sie sehen, dass die Fläche multipliziert mit der Krümmung gerade den Winkelzuwachs in der Winkelsumme ergibt.

EXERCISE 9.2: TAYLORENTWICKLUNG (5P)

Im folgenden betrachten wir die Funktion

$$f(x) = x + \cos x.$$

- (a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion. (1P)

- (b) Finden sie eine Gerade, die sich in dem Punkt $(0,1)$ an die Kurve anschmiegt. Solch eine Gerade nennt man einen linearen Fit oder eine Taylor-Näherung erster Ordnung. (1P)
- (c) Wiederholen Sie diese Aufgabe, indem Sie an den Punkt $(0,1)$ eine Schmiegeparabel legen. Man spricht hier von einem quadratischen Fit oder einer Näherung zweiter Ordnung. (1P)
- (d) Dieses Vorgehen lässt sich beliebig fortsetzen, indem man immer weitere Potenzen der Schmiegekurve hinzufügt. Im Limes unendlich hoher Potenzen erhält man eine sogenannte *Taylor-Reihe*

$$F(x) = a_0 + a_1x + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{6}a_3x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}x^n,$$

wobei a_0, a_1, a_2, \dots die Koeffizienten der Reihe sind. Berechnen Sie zunächst die erste Ableitung $F'(x)$. (2P)

- (e) Bestimmen Sie die Koeffizienten so, dass $F(x) = F'(x)$ und $F(0) = 1$ ist. Kennen Sie diese Funktion? (1P)

SAMPLE SOLUTION

- (a) Die erste und zweite Ableitung von $f(x) = x + \cos x$ lauten:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 1 - \sin x,$$

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = -\cos x.$$

- (b) Die Gerade hat die Gleichung $g(x) = mx + n$. Sie muss an der Stelle $x = 0$ mit dem Funktionswert von f übereinstimmen. Damit sie sich dort anschmiegt, müssen ferner die Steigungen übereinstimmen. Das ergibt zwei Bestimmungsgleichungen:

$$g(0) = f(0) \quad \Rightarrow \quad n = 0 + 1 = 1,$$

$$g'(0) = f'(0) \quad \Rightarrow \quad m = 1 - 0 = 1.$$

Damit ergibt sich die Geradengleichung $g(x) = 1 + x$.

- (c) Die Parabel hat die Gleichung $p(x) = ax^2 + bx + c$. Sie muss bei $x = 0$ in ihrem Funktionswert sowie in ihren ersten beiden Ableitungen mit der Funktion $f(x)$ übereinstimmen. Dabei ist $p'(x) = 2ax + b$ und $p''(x) = 2a$. Das ergibt drei Bestimmungsgleichungen:

$$p(0) = f(0) \quad \Rightarrow \quad c = 0 + 1 = 1,$$

$$p'(0) = f'(0) \quad \Rightarrow \quad b = 1 - 0 = 1,$$

$$p''(0) = f''(0) \quad \Rightarrow \quad 2a = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}.$$

Damit ergibt sich die Parabel $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Sie stimmt mit der Geradengleichung aus Teil (b), ergänzt um einen quadratischen Term, überein.

(d) Wir bilden zunächst die erste Ableitung: (1P)

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \\ F'(x) &= \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \right) \quad \text{weil } x^0 = 1 \text{ und } 0! = 1 \text{ ist} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \frac{d}{dx} x^n \quad \text{weil die Ableitung einer Konstante Null ist} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} \quad \text{weil } (n-1)! n = n! \text{ ist} \end{aligned}$$

Jetzt ist es noch sinnvoll, einen Index-Shift durchzuführen, d.h. wir lassen die Summe nicht von 1 sondern von 0 laufen und ersetzen dafür $n-1 \rightarrow n$ und $n \rightarrow n+1$: (1P)

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n$$

(e) Zunächst schauen wir uns die Bedingung $F'(0) = 0$ an:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \quad \Rightarrow \quad F(0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1.$$

Danach betrachten wir die Gleichung $F'(x) = F(x)$ (die für alle x gelten soll):

$$F'(x) = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} = a_n$$

Also müssen alle Koeffizienten gleich 1 sein. Die Funktion, die gleich ihrer eigenen Ableitung ist, ist bekanntlich die Exponentialfunktion. Damit haben wir die Darstellung der Exponentialfunktion als Taylorreihe hergeleitet:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

EXERCISE 9.3: KOMPLEXE ZAHLEN (4P)

Das Wurzelziehen aus negativen Zahlen ist verboten? Von wegen. Wir dürfen das. Dazu definieren wir einfach die imaginäre Einheit $i := \sqrt{-1}$, sodass $i^2 = -1$ ist.

(a) Berechnen Sie folgende Ausdrücke: (2P)

$$\sqrt{-4}, \quad (2+i)^2, \quad 1+i+i^2+i^3, \quad (1+i)(1-i).$$

(b) Berechnen Sie nach der Mitternachtsformel die 'Nullstellen' $x_{1,2}$ der Parabel (2P)

$$p(x) = x^2 + 2x + 2$$

und überzeugen Sie sich, dass $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ ist.

SAMPLE SOLUTION

(a) Wir wenden hier einfach die normalen Rechenregeln für das Ausmultiplizieren oder die binomischen Formeln oder das Wurzelziehen an:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2i$$

$$(2+i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2i + i^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$$

$$1+i+i^2+i^3 = 1+i-1-i = 0$$

$$(1+i)(1-i) = 1+i+i+1 = 2$$

(b) Die Nullstellen der Parabel $x^2 + 2x + 2$ sind

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i.$$

Wir bilden

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= (x + 1 - i)(x + 1 + i) \\ &= x^2 + x + ix + x + 1 + i - ix - i + 1 = x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$
