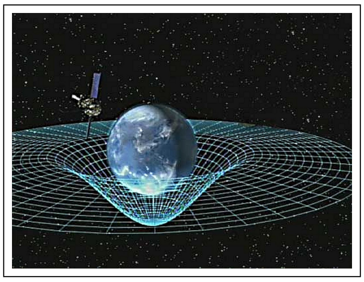
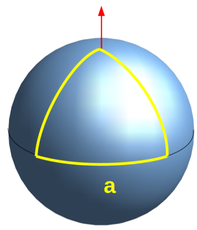


Die Raumzeit ist gekrümmt [Wikimedia]

Exercise 9.1: Winkelsumme von Dreiecken auf einer Kugel (3P)

Auf eine Kugel mit dem Radius R fährt ein Schiff vom Nordpol südwärts zum Äquator, dann eine Strecke a am Äquator entlang und schließlich wieder nordwärts zurück zum Nordpol.



(a) Berechnen Sie die Winkelsumme des Dreiecks. (2P)

(b) Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks. (1P)

Exercise 9.2: Taylorentwicklung (5P)

Im folgenden betrachten wir die Funktion

$$f(x) = x + \cos x\,.$$

(a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion. (1P)

(b) Finden sie eine Gerade, die sich in dem Punkt (0,1) an die Kurve anschmiegt. Solch eine Gerade nennt man einen linearen Fit oder eine Taylor-Näherung erster Ordnung. (1P)

(c) Wiederholen Sie diese Aufgabe, indem Sie an den Punkt (0,1) eine Schmiegeparabel legen. Man spricht hier von einem quadratischen Fit oder einer Näherung zweiter Ordnung. (1P)

(d) Dieses Vorgehen lässt sich beliebig fortsetzen, indem man immer weitere Potenzen der Schmiegekurve hinzufügt. Im Limes unendlich hoher Potenzen erhält man eine sogenannte *Taylor-Reihe*

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_2 x^2 + \frac{1}{6} a_3 x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n\,,$$

wobei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ die Koeffizienten der Reihe sind. Berechnen Sie zunächst die erste Ableitung $F'(x)$. (2P)

(e) Bestimmen Sie die Koeffizienten so, dass $F(x) = F'(x)$ und $F(0) = 1$ ist. Kennen Sie diese Funktion? (1P)

Please turn over ⇒

Exercise 9.3: Komplexe Zahlen (4P)

Das Wurzelziehen aus negativen Zahlen ist verboten? Von wegen. Wir dürfen das. Dazu definieren wir einfach die imaginäre Einheit $i := \sqrt{-1}$, sodass $i^2 = -1$ ist.

(a) Berechnen Sie folgende Ausdrücke: (2P)

$$\sqrt{-4}\,, \qquad (2+i)^2\,, \qquad 1+i+i^2+i^3\,, \qquad (1+i)(1-i)\,.$$

(b) Berechnen Sie nach der Mitternachtsformel die 'Nullstellen' $x_{1,2}$ der Parabel (2P)

$$p(x) = x^2 + 2x + 2$$

und überzeugen Sie sich, dass $p(x) = (x-x_1)(x-x_2)$ ist.

Freiwillige Übungen zur Selbstkontrolle im Orientierungsstudium Physik (`ms.hayehinrichsen.de`).