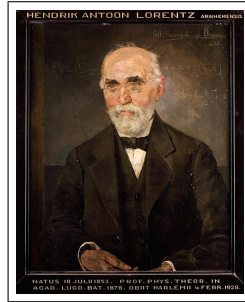


PHÄNOMENE DER PHYSIK

ORIENTIERUNGSTUDIUM – ERGÄNZENDE ÜBUNGEN – SS 2021



Hendrik Antoon Lorentz
1853-1928 [Wikimedia]

EXERCISE 8.1: LORENTZ-TRANSFORMATION

(8P)

Die Lorentz-Transformation verknüpft zwei Inertialsysteme S und S' durch eine Koordinatentransformation $(x, t) \rightarrow (x', t')$, die Raum und Zeit so miteinander kombiniert, dass die Lichtgeschwindigkeit c invariant bleibt. Sie hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned}x' &= Ax + Bt \\t' &= Cx + Dt\end{aligned}$$

mit Koeffizienten A, B, C, D , die wir im folgenden bestimmen wollen.

- Bevor wir starten, berechnen wir zur Übung die Umkehrtransformation $(x', t') \rightarrow (x, t)$ für allgemeine Koeffizienten A, B, C, D . Das geht besonders einfach in einer Matrixschreibweise. (1P)
- Invarianz der Lichtgeschwindigkeit: Wenn sich ein Lichtsignal im System S mit Lichtgeschwindigkeit gemäß $x = ct$ bewegt, so wird es sich (wie im Michelson-Morley-Experiment) auch im System S' mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, d.h. $x' = ct'$. Leiten Sie daraus eine Beziehung zwischen den Koeffizienten her. (1P)
- Stellen Sie sich ein Objekt vor, das im System S' am Ursprung ruht. Nehmen Sie an, dass sich das System S' relativ zum System S mit der Geschwindigkeit u bewegt. Leiten Sie daraus eine weitere Gleichung zwischen den Koeffizienten ab. (1P)
- Wiederholen Sie die Überlegungen aus (c), jedoch für ein am Ursprung in S ruhendes Objekt. (1P)
- Kombinieren Sie die Gleichungen aus (b),(c) und (d), um die Unbekannten B, C, D allein in A auszudrücken und dadurch zu eliminieren, und setzen Sie das Ergebnis in die Lorentz-Transformation ein. (1P)
- Berechnen Sie mit diesem Ergebnis und (a) die Umkehrtransformation. (1P)
- Reflexivität: Wenn sich das System S' von S aus gesehen mit der Geschwindigkeit u nach rechts bewegt, dann muss sich ebenso S von S' aus gesehen mit der Geschwindigkeit $-u$ nach links bewegen. Damit die Lorentz-Transformation reflexiv, also in beiden Situationen anwendbar ist, muss sich die Umkehrtransformation von der Transformation nur um ein Vorzeichen in u , also durch $u \rightarrow -u$ unterscheiden. Benutzen Sie diese Forderung, um die Unbekannte A zu bestimmen. Damit ist dann die Lorentz-Transformation vollständig bestimmt. (2P)

EXERCISE 8.2: LORENTZ-TRANSFORMATIONEN UND HYPERBELFUNKTIONEN (4P)

In der Relativitätstheorie spielen die Hyperbelfunktionen $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ und $\tanh(x)$ (häufig ausgesprochen als *kosch*, *sinsch* und *tansch*) eine wichtige Rolle. In dieser Übung wollen wir uns mit diesen Funktionen vertraut machen. Sie sind definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

und ähneln in vielfacher Weise den Winkelfunktionen.

- (a) Zeigen Sie, dass $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ ist. (1P)
(b) Beweisen Sie die Additionstheoreme (1P)

$$\begin{aligned}\sinh(x \pm y) &= \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y) \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)\end{aligned}$$

- (c) Eine Lorentz-Transformation (siehe Vorlesung) in Matrixform

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

mit $\beta = u/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ lässt auch sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}}_{=:\Lambda(\theta)} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie die *Rapidity* θ als Funktion von $\beta = u/c$. (1P)
(d) Überzeugen Sie sich, dass hintereinander ausgeführte Lorentz-Transformationen¹ additiv in der Rapidity sind, d.h. es gilt: (1P)

$$\Lambda(\theta_1)\Lambda(\theta_2) = \Lambda(\theta_1 + \theta_2)$$

Wenn Sie möchten, denken Sie über die Interpretation dieses Sachverhalts nach.

Freiwillige Übungen zur Selbstkontrolle im Orientierungsstudium Physik (ms.hayehinrichsen.de).

¹Genauer gesagt: Hintereinanderausführung von Lorentz-Transformationen in die gleiche Richtung. Da wir hier aber nur die x -Richtung haben, also die räumlichen Koordinaten eindimensional sind, ist das automatisch so.