SAMPLE SOLUTIONS EXERCISE 6

EXERCISE 6.1: PARTIELLE ABLEITUNGEN (6P)

In der Vorlesung haben wir die Wellengleichung $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(x,t) = c^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y(x,t)$ angesprochen. Dabei ist c die Ausbreitungsgeschwindigkeit, t die Zeit und x die räumliche Koordinate. Genauer müsste man allerdings schreiben

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t).$$

Dabei sind die mit den Symbolen $\frac{\partial}{\partial \ldots}$ notierten Ableitung sogenannte *partielle Ableitungen*. Die funktionieren genau so wie normale Ableitungen, man deutet damit lediglich an, dass die jeweils anderen Variablen wie Konstanten behandelt werden, z.B. $\frac{\partial}{\partial y}x^3y^3 = 3x^3y^2$. In dieser Aufgabe wollen wir das Differenzieren mit partiellen Ableitungen üben:

(a) $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x-y) \;= ?$ (1P)

(b) $\left(\frac{\partial}{\partial x}-2\frac{\partial}{\partial y}\right)x^2y^4 \;= ?$ (1P)

(c) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)e^{ax+by} \;= ?$ (1P)

(d) $\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial y}y\,\ln\Big(f(x)g(y)\Big) \;= ?$ (schon etwas schwieriger) (2P)

(e) Öffnen Sie die Seite https://www.wolframalpha.com und tippen Sie die folgende Zeile ein: (1P)

```
D[x*D[y*Log[f[x]*g[y]],y],x]
```

SAMPLE SOLUTION

(a) Hier benutzt man die Linearität des Differenzierens und die Kettenregel: (1P)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x-y) &= \frac{\partial}{\partial x}f(x-y)+\frac{\partial}{\partial y}f(x-a)\\ &= f'(x-y)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x-y)}_{=1}+f'(x-y)\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x-y)}_{=-1}\\ &= f'(x-y)-f'(x-y) \;=\; 0.\end{aligned}$$

(b) Hier benutzt man wiederum die Linearität sowie die Regeln für das Differenzieren von Potenzen: (1P)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x}-2\frac{\partial}{\partial y}\right)x^2y^4 \;&=\; \frac{\partial}{\partial x}x^2y^4-2\frac{\partial}{\partial y}x^2y^4 \;=\; y^4\frac{\partial}{\partial x}x^2-2x^2\frac{\partial}{\partial y}y^4\\ &= y^4 2x-2x^2 4y^3 \;=\; 2xy^4-8x^2y^3 \;=\; (2y-8x)xy^3\end{aligned}$$

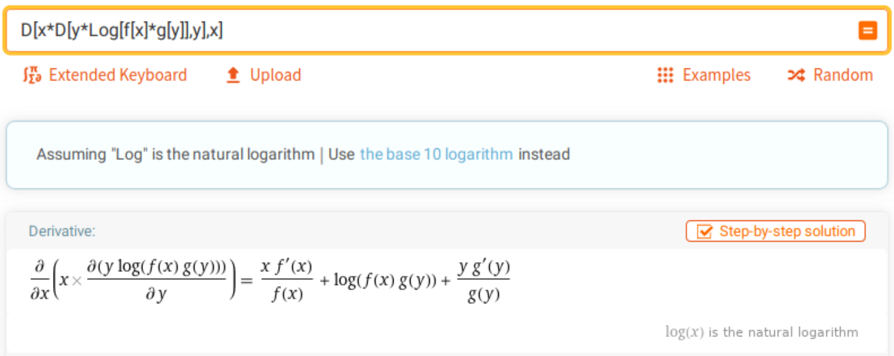
(c) In diesem Aufgabenteil muss man neben der Lineratität die Kettenregel und das Differenzieren der Exponentialfunktion beherrschen: (1P)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)e^{ax+by} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{ax+by}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}e^{ax+by} = e^{ax}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{by}-e^{ax}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{by} \\
&= e^{by}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{ax}-e^{ax}\frac{\partial^2}{\partial y^2}e^{by} = e^{by}a^2e^{ax}-e^{ax}b^2e^{by} \\
&= (a^2-b^2)e^{ax+by}
\end{aligned}$$

(d) Hier geht es um die Produktregel, die Kettenregel und um das Differenzieren des natürlichen Logarithmus. Das ist schon richtig komplex. (2P)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial y}y\,\ln\big(f(x)g(y)\big) &= \frac{\partial}{\partial x}x\left[\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y}y\right)}_{=1}\ln\big(f(x)g(y)\big)+y\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\big(f(x)g(y)\big)\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}x\left[\ln\big(f(x)g(y)\big)+y\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\big(f(x)g(y)\big)\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}x\left[\ln\big(f(x)g(y)\big)+y\left(\frac{1}{f(x)g(y)}f(x)g'(y)\right)\right] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x}x\ln\big(f(x)g(y)\big)\right]+\left[\frac{\partial}{\partial x}x\frac{yg'(y)}{g(y)}\right] \\
&= \left[\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)}_{=1}\ln\big(f(x)g(y)\big)+x\frac{\partial}{\partial x}\ln\big(f(x)g(y)\big)\right]+\left[\frac{yg'(y)}{g(y)}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}x}_{=1}\right] \\
&= \left[\ln\big(f(x)g(y)\big)+\frac{xf'(x)g(y)}{f(x)g(y)}\right]+\left[\frac{yg'(y)}{g(y)}\right] \\
&= \frac{xf'(x)}{f(x)}+\ln\big(f(x)g(y)\big)+\frac{yg'(y)}{g(y)}
\end{aligned}$$

(e) So sollte das Ergebnis aussehen: (1P)



Sie sehen: Das System löst die Aufgabe (d) problemlos in kürzester Zeit. Rechnungen wie das Differenzieren können Sie mit dem Computer machen, und zwar mit algebraischen Computersystemen (ACS). Wir benutzen in der Physik vorwiegend *Mathematica*® , die 'Engine' hinter dieser Website. Wenn Sie bei uns Physik studieren, erhalten Sie eine kostenlose Studierenden-Lizenz für dieses sehr mächtigen Werkzeugs. Sie müssen also nicht alles per Hand ausrechnen. Trotzdem ist eine grundlegende Vertrautheit mit elementaren mathematischen Techniken sehr wichtig.

Exercise 6.2: Wellengleichung und Photonentriebwerk (6P)

Wir wollen nun die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t)$$

analysieren und lösen.

(a) Wie hängt die Kreisfrequenz ω die der "gewöhnlichen" Frequenz f und der Schwingungsdauer T zusammen? Und wie hängt die Wellenzahl k mit der Wellenlänge λ zusammen? (1P)

(b) In der Vorlesung haben wir die Frequenz-Impulsbeziehung $\omega^2 = k^2 c^2$ besprochen. Beweisen Sie diese Relation. (1P)

(c) Die Gleichung $\omega^2 = k^2 c^2$ hat zwei Lösungen. Wie erklären Sie sich diesen Sachverhalt sowohl mathematisch als auch physikalisch? (1P)

(d) Wir nehmen nun an, dass die Welle in einen eindimensionalen Kasten eingesperrt ist, dessen Wände sich bei $x = 0$ und $x = a > 0$ befinden, so dass die Lösung für alle Zeiten t die Randbedingung $\psi(0,t) = \psi(a,t) = 0$ erfüllt. Berechnen Sie das Spektrum der möglichen Frequenzen. (1P)

(e) Auch Licht wird durch die Wellengleichung beschrieben. In der Quantenmechanik lernt man, dass die Energie und der Impuls eines Photons durch $E = hf$ und $p = \frac{h}{\lambda}$ gegeben ist. Berechnen Sie den Schubkraft einer Leuchtdiode mit 1W Leistung (Photonentriebwerk). (2P)

Sample Solution

(a) Der Zusammenhang der Größen lautet:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \; = \; 2\pi f \,, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

In der Physik mögen wir ω und k, weil man dann im Argument der Winkelfunktionen nicht ständig 2π schreiben muss.

(b) Wie in der Vorlesung besprochen, benutzen wir den Ansatz

$$y(x,t) = A \sin(kx) \sin(\omega t).$$

Diesen Ansatz kann man nun einfach in die Differentialgleichung einsetzen. Dazu berechnen wir die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) &= A \sin(kx) \sin''(\omega t) = -\omega^2 A \sin(kx) \sin(\omega t) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) &= A \sin''(kx) \sin(\omega t) = -k^2 A \sin(kx) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Dann setzen wir diese in die Differentialgleichung ein:

$$-\omega^2 A \sin(kx) \sin(\omega t) \; = \; -c^2 k^2 A \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Hier kann man durch $A\sin(kx)\sin(\omega t)$ teilen[1] und erhält dann $\omega^2 = k^2c^2$.

(c) Die beiden Lösungen lauten

$$\omega = \pm kc \qquad \text{bzw.} \qquad k = \pm\frac{\omega}{c}\,.$$

Mathematisch hängt die Existenz zweier Lösungen damit zusammen, dass wir hier einer (lineare) Differentialgleichung zweiter Ordnung (mit zweiten Ableitungen) haben. Dort muss man als Anfangswert die Funktion und ihre Ableitung vorgeben, das sind zwei Freiheitsgrade. Damit gibt es zwei fundamentale Lösungen. Bei Schwingungsproblemen sind das typischerweise Sinus und Cosinus. Physikalisch lassen sich die zwei Lösungen auch mit einer hinlaufenden und einer rücklaufenden Welle erklären.

(d) Der Ansatz $y(x,t) = A\sin(kx)\sin(\omega t)$ erfüllt bereits die linke Randbedingung $y(0,t) = 0\ \forall t$ (das liegt daran, dass wir hier den Sinus und nicht den Cosinus für den zeitlichen Anteil gewählt haben). Es bleibt also nur die rechte Randbedingung zu prüfen:

$$y(a,t) = A\sin(ka)\sin(\omega t).$$

Da diese Bedingung für alle Zeiten erfüllt sein soll und $A \neq 0$ ist, muss $\sin(ka) = 0$ sein. Die Lösung ist $k = \frac{\pi n}{a}$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl ist. Die möglichen Frequenzen sind also

$$\omega = \pm kc = \pm - \frac{\pi cn}{a}.$$

(e) Für ein Photon gilt $E = hf = \hbar\omega$ und $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$, wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ das in der Physik übliche durch 2π geteilte Plancksche Wirkungsquantum ist ("h-quer"). Wenn man das in die Beziehung $\omega^2 = k^2c^2$ einsetzt, fällt $\hbar$ heraus und man erhält

$$E^2 = p^2c^2$$

und wenn man daraus die Wurzel zieht und annimmt, dass $E > 0$ und $p > 0$ ist, wird das zu

$$E = pc.$$

Dies ist übrigens so ähnlich wie die Formel $E = mc^2$ von Einstein, nur dass Licht ja eben keine Masse hat.

Die Leuchtdiode, unser Mini-Photonenantrieb, hat eine Leistung von $P = 1W$, wobei $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ oder genauer gesagt $p = \dot{E}$ ist. Folglich ist

$$P = \dot{E} = \dot{p}c = Fc \quad \Rightarrow \quad F = \frac{P}{c}$$

wobei wir die Newtonsche Definition der Kraft als Impulsänderung $F = \dot{p}$ bentzt haben. Damit ergibt sich rechnerisch

$$P = 1W = 1\frac{\mathrm{kg\ m^3}}{\mathrm{s^2}}\,, \quad c \approx 3\times 10^8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{P}{c} = \frac{1}{3\times 10^8}\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s^2}}.$$

Übrigens: Wenn die Leuchtdiode ein Gewicht von 1 Gramm hat und 1 Jahr lang in die gleiche Richtung leuchtet, sollte sie auf immerhin rund 300 km/h beschleunigen. Sie müsste allerdings dazu die ganze Zeit mit Energie versorgt werden. Mit einem Akku erreicht man nur wenige Millimeter pro Stunde.

[1] Man darf hier nicht durch Null teilen. Die Amplitude A ist sicher ungleich Null. Die beiden Sinus-Anteile werden periodisch immer wieder Null. Diese Fälle müssten Sie strenggenommen ausschließen. Weil die Gleichung aber für alle x und alle t gelten soll, sind das nur einzelne Punkte.