Sample Solutions Exercise 3

Exercise 3.1: Im Fahrstuhl (3P)

Angenommen ein Fahrstuhl fährt nach oben, wobei seine Höhe h linear mit der Zeit zunimmt, d.h. $h = vt$.

(a) Betrachten Sie ein Bezugssytem am Boden mit Koordinaten x, y, z und Zeit t sowie ein analog orientiertes Bezugssystem im Fahrstuhl mit Koordinaten x', y', z' und der Zeit t'. Geben Sie die Transformation zwischen beiden Systemen an. Wie heißt diese Transformation? (1P)

(b) Kann man im Inneren des Fahrstuhls feststellen, ob er sich bewegt oder nicht? Begründen Sie Ihre Antwort. (1P)

(c) Die potentielle Energie einer Person im Fahrstuhl $E_{pot} = mgh = mgvt$ steigt kontinuierlich an, während die potentielle Energie einer Person am Boden konstant ist. Wie kann die Person im Fahrstuhl diesen Unterschied feststellen? (1P)

Sample Solution

(a) Es handelt sich um die *Galilei-Transformation*:

$$x' = x\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z - vt\,, \quad t' = t$$

Hinweis: Falls Sie das falsche Vorzeichen haben, also $z' = z + vt$ herausgefunden haben, machen Sie sich klar, warum das Vorzeichen hier negativ sein muss.

(b) Nein. Im Inneren des Fahrstuhls können nur mechanische Kräfte gemessen werden, also wegen $\vec{F} = m\vec{a}$ nur Beschleunigungen. Beschleunigungen sind aber in beiden Bezugssystemen gleich:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\,' = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z - vt \end{pmatrix} = \vec{a}$$

weil $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(vt) = v\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}t^2} = 0$ ist.

(c) Gar nicht. Potentiale sind Hilfskonstruktionen, die dazu dienen, Kräfte zu berechnen. Dabei ist die Kraft der negative räumliche Gradient (Ableitung) des Potentials. In diesem Fall wäre die Kraft am Boden

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{pot} \;=\; -\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \end{pmatrix} mgz = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

einfach die nach unten gerichtete Schwerkraft in z-Richtung. Im Fahrstuhl spürt man genau die gleiche Kraft:

$$\vec{F}\,' = -\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \end{pmatrix} mg(z - vt) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \vec{F}$$

Eine ebenfalls richtige Antwort wäre die Aussage, dass Potentiale als solche keine direkte physikalische Bedeutung haben, sondern nur Potentialdifferenzen, und die sind in beiden Bezugssystemen gleich.

Exercise 3.2: Rotationssymmetrie (5P)

Physikalische Gesetze sind in der Regel *rotationsinvariant*, d.h. sie ändern ihre Form nicht, wenn man das betrachtete System einer Drehung unterwirft. In dieser Aufgabe wollen wir den Umgang mit Rotationen in zwei Dimensionen üben.

(a) Wie lautet die Drehmatrix $\mathbf{R}(\phi)$ für eine Drehung im $\mathbb{R}^2$, also in der Ebene? (1P)

(b) Zeigen Sie: Das Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = u_x v_x + u_y v_y$$

ist invariant unter Drehungen beider Vektoren um denselben Winkel. (2P)

(c) Überzeugen Sie sich durch Matrixmultiplikation, dass die Hintereinanderausführung von Drehungen additiv im Winkel ist, also $\mathbf{R}(\phi_1)\mathbf{R}(\phi_2) = \mathbf{R}(\phi_1 + \phi_2)$. (2P)

Sample Solution

(a) Die Drehmatrix lautet

$$\mathbf{R}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

(b) Die gedrehten Vektoren $\vec{u}'$ und $\vec{v}'$ sind gegeben durch

$$\vec{u}' = \mathbf{R}\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\phi\, u_x - \sin\phi\ u_y \\ \sin\phi u_x + \cos\phi\, u_y \end{pmatrix}$$

und analog $\vec{v}'$. Wir berechnen das Skalarprodukt der gedrehten Vektoren:

$$\begin{aligned} \vec{u}' \cdot \vec{v}' &= \begin{pmatrix} \cos\phi\, u_x - \sin\phi\ u_y \\ \sin\phi u_x + \cos\phi\, u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi\, v_x - \sin\phi\ v_y \\ \sin\phi v_x + \cos\phi\, v_y \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{=1} u_x v_x + \underbrace{(-\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\cos\phi)}_{=0} u_x v_y \\ &\quad + \underbrace{(-\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\cos\phi)}_{=0} u_y v_x + \underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{=1} u_y v_y \\ &= u_x v_x + u_y v_y = \vec{u} \cdot \vec{v}\,. \end{aligned}$$

(c) Hier benötigen wir die Additionstheoreme für Winkelfunktionen:

$$\cos(\phi_1 + \phi_2) = \ldots\,, \qquad \sin(\phi_1 + \phi_2) = \ldots$$

Suchen Sie diese Additionstheoreme heraus und wenden Sie diese 'rückwärts' an:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}(\phi_1)\mathbf{R}(\phi_2) &= \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 & -\cos\phi_1\sin\phi_2 - \sin\phi_1\cos\phi_2 \\ \cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2 & -\sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_1\cos\phi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\phi_1+\phi_2) & -\sin(\phi_1+\phi_2) \\ \sin(\phi_1+\phi_2) & \cos(\phi_1+\phi_2) \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\phi_1+\phi_2)
\end{aligned}
$$

Exercise 3.3: ArXiV (4P)

(a) Beschreiben Sie kurz die Rolle des ArXiV preprint servers im Publikationswesen.

(b) Findet in ArXiV eine Qualitätskontrolle (Begutachtung) der Publikationen statt?

(c) Worum geht es ganz grob thematisch in dem Artikel arXiv:1802.06069 ?

(d) Welcher Ihrer Dozenten hat in dem Artikel "Coherent light emission of exciton-polaritons in an atomically thin crystal at room temperature" mitgearbeitet?

Sample Solution

(a) ArXiV ist ein Preprint-Server. Dort findet man fast alle Publikationen aus der Physik und anderen MINT-Fächern. Es handelt sich um Vordrucke (preprints) der fast fertigen Publikationen, die meistens quasi identisch mit den endgültigen Publikationen sind. ArXiV ist kostenlos.

(b) Nein.

(c) Es geht um Skaleninvarianz (wie besprochen in der Vorlesung, also z.B. $\vec{x} \to \Lambda\vec{x}$) im Zusammenhang mit der Inflationstheorie im Universum. Unter "Inflation" versteht man eine stark beschleunigte Ausdehnungsphase des frühen Universums. Der Artikel behandelt ein Verfahren, mit dem man bestimmte Beobachtungsgrößen in einem skaleninvarianten Universum berechnen kann.

(d) Sebastian Klembt. Wie Sie sehen, werden Titel (Prof. Dr. usw.) in wissenschaftlichen Veröffentlichungen nicht genannt.
