

PHÄNOMENE DER PHYSIK

ORIENTIERUNGSSTUDIUM – ERGÄNZENDE ÜBUNGEN – SS 2021



Welleninterferenz [Cubitt Robert, Wikimedia]

EXERCISE 6.1: PARTIELLE ABLEITUNGEN (6P)

In der Vorlesung haben wir die Wellengleichung $\frac{d^2}{dt^2}y(x, t) = c^2 \frac{d^2}{dx^2}y(x, t)$ angesprochen. Dabei ist c die Ausbreitungsgeschwindigkeit, t die Zeit und x die räumliche Koordinate. Genauer müsste man allerdings schreiben

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x, t).$$

Dabei sind die mit den Symbolen $\frac{\partial}{\partial \dots}$ notierten Ableitung sogenannte *partielle Ableitungen*. Die funktionieren genau so wie normale Ableitungen, man deutet damit lediglich an, dass die jeweils anderen Variablen wie Konstanten behandelt werden, z.B. $\frac{\partial}{\partial y}x^3y^3 = 3x^3y^2$. In dieser Aufgabe wollen wir das Differenzieren mit partiellen Ableitungen üben:

- (a) $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)f(x - y) = ?$ (1P)
- (b) $\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}\right)x^2y^4 = ?$ (1P)
- (c) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)e^{ax+by} = ?$ (1P)
- (d) $\frac{\partial}{\partial x}x \frac{\partial}{\partial y}y \ln(f(x)g(y)) = ?$ (schon etwas schwieriger) (2P)
- (e) Öffnen Sie die Seite <https://www.wolframalpha.com> und tippen Sie die folgende Zeile ein: (1P)

$$D[x*D[y*Log[f[x]*g[y]], y], x]$$

EXERCISE 6.2: WELLENGLEICHUNG UND PHOTONENTRIEBWERK (6P)

Wir wollen nun die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x, t)$$

analysieren und lösen.

- (a) Wie hängt die Kreisfrequenz ω die der “gewöhnlichen” Frequenz f und der Schwingungsdauer T zusammen? Und wie hängt die Wellenzahl k mit der Wellenlänge λ zusammen? (1P)
- (b) In der Vorlesung haben wir die Frequenz-Impulsbeziehung $\omega^2 = k^2c^2$ besprochen. Beweisen Sie diese Relation. (1P)

- (c) Die Gleichung $\omega^2 = k^2 c^2$ hat zwei Lösungen. Wie erklären Sie sich diesen Sachverhalt sowohl mathematisch als auch physikalisch? (1P)
- (d) Wir nehmen nun an, dass die Welle in einen eindimensionalen Kasten eingesperrt ist, dessen Wände sich bei $x = 0$ und $x = a > 0$ befinden, so dass die Lösung für alle Zeiten t die Randbedingung $\psi(0, t) = \psi(a, t) = 0$ erfüllt. Berechnen Sie das Spektrum der möglichen Frequenzen. (1P)
- (e) Auch Licht wird durch die Wellengleichung beschrieben. In der Quantenmechanik lernt man, dass die Energie und der Impuls eines Photons durch $E = hf$ und $p = \frac{h}{\lambda}$ gegeben ist. Berechnen Sie den Schubkraft einer Leuchtdiode mit 1W Leistung (Photonenriebwerk). (2P)